ΘΕΜΑΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ 2005 - 2019

1. Με χρήση του μετασχηματισμού x=2τεμθ, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$.

2. Να δείξετε ότι $\int \frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx = \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}+c$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$.

3. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[0,\pi]$. Αν για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x)=f(\pi-x)$ και $g(x)+g(\pi-x)=\pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=\pi-y$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} f(x)\,g(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x\,\eta\mu\,x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$.

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=e^x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο R με τις ιδιότητες:

(i) Η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R.

(ii) $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in R$.

(iii) $f(x+\alpha)=f(x)$, $\forall x\in R$, όπου $\alpha\neq 0$, σταθερός αριθμός.

(iv) $f(0)=0$.

Να αποδείξετε:

(α) $f'(-x)=-f'(x)$, $\forall x\in R$.

(β) $f'(x+\alpha)=f'(x)$, $\forall x\in R$.

(γ) $\int_0^{\alpha} x^2 f'(x)dx = -2\int_0^{\alpha} xf(x)dx$.

(δ) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση x=α–y, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε: $2\int_0^{\alpha} xf(x)dx = \alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

(ε) Χρησιμοποιώντας το (γ) και (δ) να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} x^2 f'(x)dx = -\alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ και

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x dx = 2$.

Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με f(-x)=f(x) και g(x)+g(-x)=1, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = -x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx, \quad \alpha > 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}dx$.

8. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$, $x > 0$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \ln\sqrt{x}\, dx$

9. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α,β] και για την οποία ισχύει η σχέση $f(\alpha+\beta-x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$.

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό, $x = \alpha+\beta-u$ να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x\, f(x)\, dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

β) Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} x\, \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx$

10. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = \eta\mu\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}} d\chi$.

11. (α) Να αποδείξετε ότι: $(\tau o\xi\varepsilon\varphi\chi)' = \frac{1}{1+\chi^2}$, $\chi \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα , τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο $f(\chi) = \tau o\xi\varepsilon\varphi(\chi^2)$ και να αποδείξετε ότι $f(\chi) \geq 0$, $\chi \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\alpha]$, $\alpha > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi^2 = u$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} \chi^3 g(\chi^2)d\chi = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} \chi g(\chi)d\chi$.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(\chi) = \chi^3 \tau o\xi\varepsilon\varphi(\chi^2)$,τον άξονα των τετμημένων χ′χ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = 1$.

12. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{x^2+1} dx\,, \qquad \nu \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

(α) Να δείξετε ότι $I_{2\nu} = \frac{1}{2\nu-1} - I_{2\nu-2}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_4.

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 2\alpha - x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^{2\alpha} f(2\alpha - x)dx = \int_0^\alpha f(x)\, dx$$

(4 μονάδες)

(β) Αν $f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\alpha} f(x)\, dx = 2\alpha\beta$$

(4 μονάδες)

(γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 [(x-2)^{2018} \cdot \text{ημ}^{2019}(x-2) + 3]dx$$

(2 μονάδες)