Συνδυαστικές ασκήσεις με τα θεωρήματα των Bolzano, Rolle και το Θ.Μ.Τ.

1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, όπου $0<\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\alpha+\beta-x_0$. **β)** υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

2. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο (α,β) .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$.

3. Έστω συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$. Αν είναι $2f(2)=f(1)+f(3)$:

α) να εφαρμόσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$.

β) να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(0,1)$, ώστε $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$. **β)** υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

5. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, και $x_1,x_2,x_3\in[\alpha,\beta]$. Αν x_1,x_2,x_3 και $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ αποτελούν ξεχωριστές αριθμητικές προόδους, να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma)=0$.

6. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$, για κάποιο $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο (α,β) .

β) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο x_0, να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

γ) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)>0$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, ώστε $f''(\xi)=0$.

8. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί f(2), f(4), f(6) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(2,6)$, ώστε $f''(x_0)=0$.

9. Έστω $f(x)=\alpha^2x^6+\beta x^4+x^2+\gamma+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}^*$, $3\beta^2<5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία, που ν' ανήκουν στην γραφική της παράσταση.

10. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\beta)<0$ και $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)<0$.