

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

### ΕΝΟΤΗΤΑ 1.Μαθηματική Λογική - Μέθοδοι Απόδειξης

#### Ευθεία Απόδειξη

1) Αν  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ , να αποδείξετε ότι :  $x = y, \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$

2) Έστω ότι  $\alpha, \beta$  δυο ακέραιοι αριθμοί , να αποδείξετε ότι :

α) Αν οι  $\alpha, \beta$  είναι άρτιοι, τότε και ο αριθμός  $\alpha + \beta$  είναι άρτιος

β) Αν οι  $\alpha, \beta$  είναι περιττοί, τότε και ο αριθμός  $\alpha \cdot \beta$  είναι περιττός

γ) Αν ο  $\alpha$  είναι άρτιος και ο  $\beta$  είναι περιττός, τότε ο αριθμός  $\alpha + \beta$  είναι περιττός και ο αριθμός  $\alpha \cdot \beta$  είναι άρτιος .

#### Μάθαμε ότι :

Αν ένας αριθμός  $\alpha$  είναι άρτιος, τότε  $\alpha = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$

Αν ένας αριθμός  $\beta$  είναι περιττός, τότε  $\beta = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

Αν ο αριθμός  $\alpha$  διαιρεί τον  $\beta$  ( γράφουμε  $\alpha / \beta$  ), τότε  $\exists \kappa \in \mathbb{Z} : \beta = \alpha \cdot \kappa$

(Αν για όλα τα πιο πάνω τα  $\alpha, \beta$  είναι φυσικοί αριθμοί τότε  $\kappa \in \mathbb{N}$  )

#### Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής

1) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει:

α)  $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = n \cdot (2n + 1)$

β)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

γ)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{3}$

δ)  $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

2) Να αποδείξετε ότι το 3 διαιρεί την παράσταση  $A = v^3 + 2v, \forall v \in \mathbb{N}$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2 και 4. Τριγωνομετρία

3) Να επιλύσετε το τρίγωνο ABΓ αν

$$\alpha = 6\text{cm}, \beta = 6\sqrt{3}\text{cm}, \Gamma = 9\sqrt{3}\text{cm}^2$$

4) Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται :  $\alpha = 6\sqrt{3}\text{cm}, \gamma = 6\text{cm}$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ, \hat{A} < 90^\circ$ . Να επιλύσετε το τρίγωνο. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι στο τρίγωνο ABΓ με

$$\hat{A} < 90^\circ, \text{ ισχύει η σχέση : } \Gamma = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu \hat{A}}{2}$$

5) Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α)  $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu \alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = 2$

β)  $\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi \alpha$

γ)  $\frac{\sigma\phi\theta - \epsilon\phi\theta}{\sigma\upsilon\nu^2 2\theta} = 4\sigma\tau\epsilon\mu 4\theta$

δ)  $\frac{\eta\mu^2 \alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{\eta\mu \alpha (1 + \sigma\upsilon\nu \alpha)} = 2\epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$

$$\epsilon) \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \eta\mu\alpha$$

$$\sigma\tau) \sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{B}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\zeta) \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha}{\eta\mu 3\alpha - \eta\mu 7\alpha} = -\sigma\varphi\alpha$$

$$\eta) \frac{2\sigma\upsilon\nu 5\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 8\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu^2 2\alpha}{4}$$

$$6) \text{ Αν } \epsilon\varphi\alpha = 4\epsilon\varphi\beta \text{ να αποδείξετε ότι } \epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{3\eta\mu 2\beta}{5 - 3\sigma\upsilon\nu 2\beta} .$$

$$7) \text{ Αν } 3(\sigma\upsilon\nu 2\theta + 1) = 4\eta\mu 2\theta, \text{ να αποδείξετε ότι } \epsilon\varphi\theta = \frac{3}{4} .$$

8) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \gamma^2\eta\mu 2A + \alpha^2\eta\mu 2\Gamma = 2\alpha\gamma\eta\mu B$$

$$\beta) \alpha^2 = (\beta - \gamma)^2 + 4\beta\gamma\eta\mu^2 \frac{A}{2}$$

$$9) \text{ Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση } \eta\mu A = 4 \cdot \eta\mu \frac{A}{2} \cdot \eta\mu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} .$$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

10) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις  $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = 3\sigma\upsilon\nu A$  και

$2\eta\mu^2 \frac{B}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu\Gamma$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

11) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α)  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

β)  $\epsilon\phi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sigma\phi x = 1$

γ)  $\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - 5\sigma\upsilon\nu x$

δ)  $\sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi 3x = \eta\mu 5x$

12) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

α)  $2\sigma\upsilon\nu\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

β)  $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu x$

13) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1 - 4\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$$

14) Αν  $\epsilon\phi\beta = \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$  να δείξετε ότι  $\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta = 1$  και στη συνέχεια να

δείξετε ότι  $\epsilon\phi(\beta - \alpha) = \sigma\phi 2\alpha$

15) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση :

$$\eta\mu A = 4 \cdot \eta\mu \frac{A}{2} \cdot \eta\mu \frac{B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

16) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\epsilon\phi A \cdot \epsilon\phi \Gamma = 1 \text{ και } 4E = \beta^2$$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

17) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση:  $\frac{\eta\mu A + \eta\mu B}{\eta\mu \Gamma} = \sigma\phi \frac{\Gamma}{2}$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.