

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ - ΕΥΘΕΙΑ**ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ:****Άσκηση 1**

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 2\chi - 3\psi = 8$ και $\varepsilon_2: -4\chi - 3\psi = 2$ και σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων.

Άσκηση 2

Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB , όταν $A(-1,6)$ και $B(5,-2)$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $\begin{vmatrix} \chi & \psi & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$ και $\begin{vmatrix} \chi & \psi \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2$ παριστάνουν ευθείες κάθετες.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} \chi & \psi & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία

$A(-2,4)$ και $B(-3,-1)$.

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1): $2x + y = 3$, (ε_2): $x + 4y = 0$ και (ε_3): $2x - y + 2 = 0$ δεν συντρέχουν.

Άσκηση 6

Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(-2,-1)$ και $\Gamma(4,\mu)$. Να βρείτε την τιμή του μ για να είναι τα σημεία **συνευθειακά**.

Άσκηση 7

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρές $5\chi - 12\psi - 13 = 0$ και $5\chi - 12\psi - 78 = 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΜΕΡΟΥΣ:**Άσκηση 1**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$) με $A(2,5)$. Το ύψος του $AΔ$ ανήκει στην ευθεία $\epsilon_1: 2\chi + \psi = 9$ και το $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ είναι το μέσο της AB .

Να βρείτε:

- (α) Τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του τριγώνου $ABΓ$.
- (β) Το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$.
- (γ) Τη γωνία B (Η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου).

Άσκηση 2

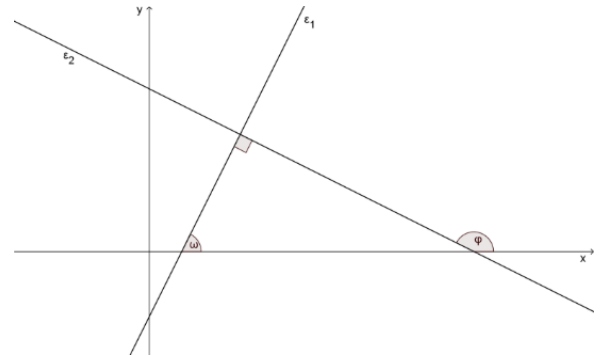
Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$, η πλευρά AB έχει εξίσωση $3\chi - 2\psi - 12 = 0$ και η πλευρά AD έχει εξίσωση $\chi + 4\psi - 4 = 0$. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(3,2)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(2,4)$.
- β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB .
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις της πλευράς $BΓ$ και της διαγωνίου $AΓ$.
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$.

Άσκηση 3

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο κάθετες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

- α) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\varphi = -\sigma\omega$.
- β) Αν η ευθεία $ax + \beta y + 13 = 0$ είναι κάθετη στην ευθεία $3x - 4y - 7 = 0$ και περνά από το σημείο $A(5,2)$, να υπολογίσετε τα α και β .

**Άσκηση 4**

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με κορυφές $A(0,5)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(2,-3)$.

- α) να υπολογίσετε το εμβαδόν E του τριγώνου
- β) να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου
- γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιάς A του τριγώνου, με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου
- δ) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Z , έτσι ώστε το $AZBΓ$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 5

Οι εξισώσεις $3\chi - 5\psi - 8 = 0$ και $2\chi + 3\psi - 18 = 0$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών $AΓ$ και $BΓ$ του τριγώνου $ABΓ$ αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο $ABΓ$ έχει κορυφές $A(1,-1)$ και $B(3,4)$. Να βρείτε:

- i. την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη προς την AB .
- ii. την εξίσωση της διαμέσου $ΓM$.
- iii. την εξίσωση του ύψους $AΔ$.
- iv. το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$.
- v. το μέτρο της γωνιάς Γ του τριγώνου $ABΓ$.

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(6, -3)$ και $B(0, -1)$. Η εξίσωση μιας πλευράς του τριγώνου είναι η $\psi = 2\chi - 1$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\psi = 2\chi - 1$ είναι η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD του τριγώνου.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου D .

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο D και είναι παράλληλη προς την AB .

Άσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0,0)$, $B(x, y)$ και $\Gamma(-7,1)$ με ύψος $BE: -7\chi + \psi = 10$.

Η κορυφή B βρίσκεται πάνω στην ευθεία $-2\chi - 3\psi = -7$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B .

Αν η κορυφή B έχει συντεταγμένες $(-1,3)$.

β) Δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να καθορίσετε την ορθή γωνία του

γ) Βρείτε το μήκος του ύψους BE του τριγώνου

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ του τριγώνου

ε) Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής D ώστε το $AB\Gamma D$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

στ) Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma D$.

Άσκηση 8

Το $AB\Gamma D$ είναι τετράπλευρο με κορυφές $A(0, 4)$, $B(5, 4)$, $D(-2, 0)$ και οι πλευρές ΓD και $B\Gamma$ έχουν εξισώσεις $\chi + 2\psi + 2 = 0$ και $-2\chi + \psi + 6 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

β) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma D$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma D$.

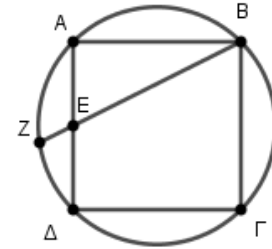
δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο M της AB και είναι παράλληλη με τη $B\Gamma$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ:

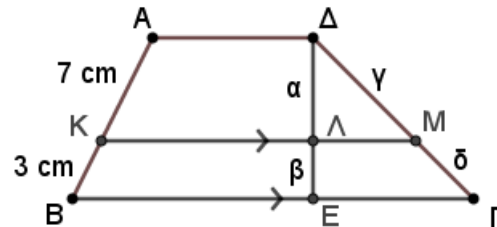
Άσκηση 1

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) . Αν E είναι το μέσο της $A\Delta$ και η προέκταση της BE τέμνει τον κύκλο στο Z , να υπολογίσετε το μήκος του EZ .



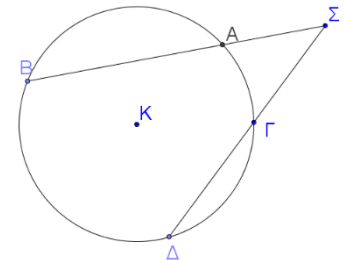
Άσκηση 2

Στο διπλανό τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $KM \parallel B\Gamma$, $\Delta E = 8\text{ cm}$ και $\Delta\Gamma = 13\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τα μήκη α , β , γ και δ .



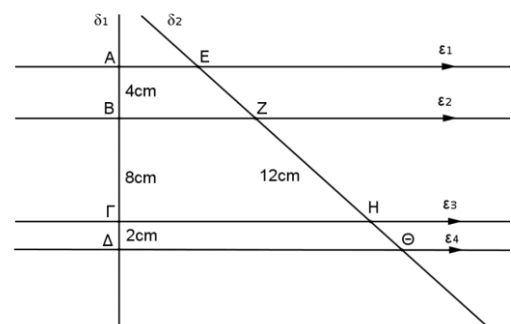
Άσκηση 3

Στο πιο κάτω σχήμα οι ημιευθείες ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$ είναι τέμνουσες του κύκλου (K, R) . Αν $\Sigma\Delta = 9\text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 5\text{ cm}$ και $\Sigma A = 3\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB .



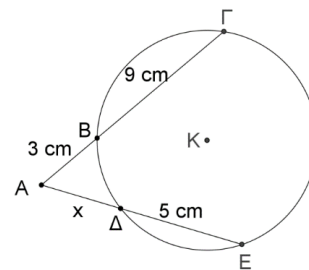
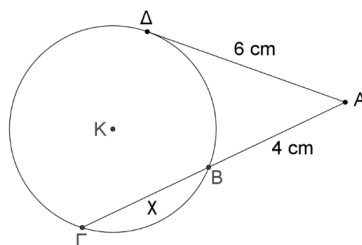
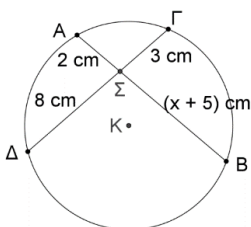
Άσκηση 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $AB = 4\text{ cm}$, $B\Gamma = 8\text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 2\text{ cm}$, $ZH = 12\text{ cm}$ και $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3 \parallel \epsilon_4$. Να υπολογίσετε τα μήκη των EZ και $Z\Theta$.



Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τη τιμή του χ στις πιο κάτω περιπτώσεις:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΜΕΡΟΥΣ:

Άσκηση 1

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $KLMN$. Από σημείο A της MN φέρουμε κάθετη AB πάνω στη διαγώνιο NL (B σημείο της NL), η οποία τέμνει την προέκταση της LM στο σημείο Γ . Να δείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα ΓMA και ΓLB είναι όμοια
- (β) $(AB)(M\Gamma) = (AM)(BN)$

Άσκηση 2

Από σημείο P που βρίσκεται εκτός κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη PA (A σημείο επαφής) και τέμνουσα PBG . Η διχοτόμος της γωνίας PA τέμνει την AB στο K και την AG στο Δ . Να δείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα AKP και P είναι όμοια.
- β) $\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{PK}$

Άσκηση 3

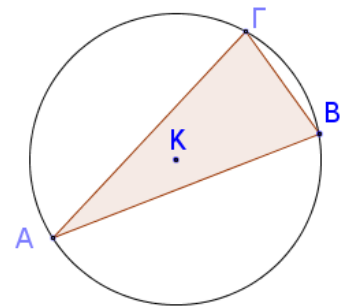
Από σημείο Σ εκτός κύκλου (K, R) φέρνουμε εφαπτομένη $\Sigma\Gamma$ (Γ σημείο επαφής) και ΣAB μια τέμνουσα του κύκλου.

- (α) να δείξετε ότι $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)^2$
- (β) να βρείτε το ΣA αν $\Sigma\Gamma = 6\text{ cm}$ και $AB = 5\text{ cm}$.

Άσκηση 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Z . Να δείξετε ότι

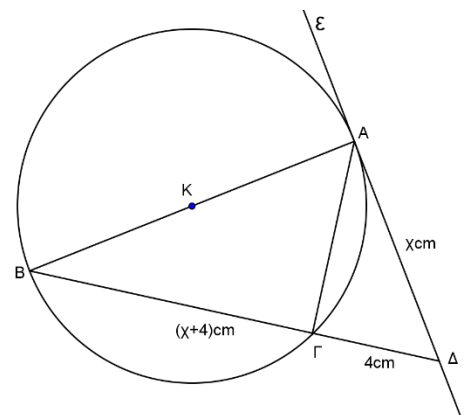
- (α) τα τρίγωνα $B\Gamma Z$ και ABZ είναι όμοια
- (β) $(ZB)^2 = (Z\Gamma)(ZA)$



Άσκηση 5

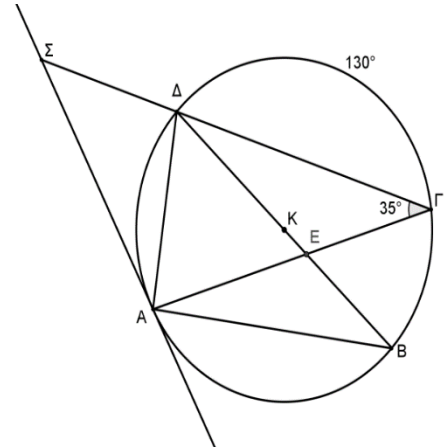
Δίνεται ο κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και ϵ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A .

- α) Να αποδείξετε ότι $(A\Delta)^2 = (\Gamma\Delta) \cdot (B\Delta)$.
- β) Αν $(A\Delta) = \chi\text{ cm}$, $(\Gamma\Delta) = 4\text{ cm}$ και $(B\Gamma) = (\chi + 4)\text{ cm}$, να υπολογίσετε το χ .
- γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος της ακτίνας του κύκλου ισούται με $4\sqrt{3}\text{ cm}$.



Άσκηση 6

Δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο BD όπου A και Γ σημεία του κύκλου, E το σημείο τομής των AG και BD . AS εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του A . Αν η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta = 35^\circ$ και το τόξο $\Delta\Gamma = 130^\circ$:



- α) να υπολογίσετε τις γωνίες $E\hat{A}B, B\hat{\Delta}\Gamma, S\hat{A}\Delta$
- β) να αποδείξετε ότι: $(AB) \cdot (\Delta E) = (\Gamma\Delta) \cdot (AE)$
- γ) αν $SA = 8cm$ και $\Delta\Gamma = 12cm$, να υπολογίσετε το μήκος του $S\Delta$ (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

Άσκηση 7

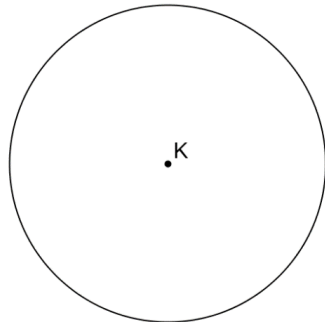
Σε κύκλο (K, R) , η διάμετρος AB και η χορδή ΓE τέμνονται κάθετα στο σημείο Δ . Να δείξετε ότι:

- α) $(A\Gamma)^2 = (AB)(A\Delta)$
- β) $(A\Gamma)^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma) + (\Delta A)^2$

Άσκηση 8

Δίνεται ο κύκλος (K, R) με διάμετρο την AB . Σε σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) και από το A τη χορδή AG . Από το Γ φέρουμε την $\Gamma\Delta$ κάθετη στην (ε) . Η $\Gamma\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο E . Να δείξετε ότι:

- α) $\Delta\Gamma \parallel AB$
- β) $(A\Gamma)^2 = (AB)(\Delta\Gamma)$
- γ) $(\Delta A)^2 = (\Delta E)(\Delta\Gamma)$
- δ) $(\Delta A)^2 = \frac{(\Delta E)(A\Gamma)^2}{2R}$



Άσκηση 9

i) Από σημείο S εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτομένη SA και τέμνουσα $SB\Gamma$ του κύκλου. Αν M είναι το μέσο του μικρού τόξου $B\Gamma$ και Δ το σημείο τομής της $B\Gamma$ με την AM , να αποδείξετε ότι:

- α) $(SA)^2 = (SB) \cdot (S\Gamma)$
- β) $(\Delta A) \cdot (M\Gamma) = (A\Gamma) \cdot (\Delta B)$
- ii) Αν Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $(B\Gamma)^2 = 4(\Delta M) \cdot (\Delta A)$