

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Δίνεται η συνάρτηση $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ με $a, b \in \mathbb{R}$

- (α) Να βρείτε τις τιμές των a και b , αν η συνάρτηση έχει σημείο καμπής για $x = 1$ και τοπικό ακρότατο για $x = 3$.
- (β) Αν $a = -3$ και $b = -9$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Η συνάρτηση με τύπο: $\psi = ax^3 - 3x^2 + b$ έχει σημείο καμπής στο $A(1, 3)$.

- a) Να υπολογίσετε τις τιμές των σταθερών a και b .
- b) Αν $a = 1$ και $b = 5$, να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Η συνάρτηση με τύπο $y = ax^2 + 2bx + 4$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(1, 3)$.

- (α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών a και b .
- (β) Αν $a = 1$ και $b = -1$ να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με $x = -1$.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Να βρείτε το σημείο καμπής της συνάρτησης $y = 3x^3 - 9x^2 + 5x - 2$

Η συνάρτηση με τύπο $y = ax^3 - bx^2 + 3$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\Sigma(-2, 7)$.

(α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών a και β .

(β) Αν $a = 1$ και $\beta = -3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με $x = -3$.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Δίνεται η καμπύλη $f(x) = x^2 + ax + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών a και β , αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $\Sigma(0, 1)$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση (ε): $x - 3y + 1 = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + 8x + 11$ όπου $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(-2, \beta)$. Να βρείτε τις τιμές των a και β .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Η συνάρτηση με τύπο $y = x^3 + ax^2 + \beta$ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $A(-1, 6)$

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $a = 3$ και $\beta = 4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $B(1, 8)$

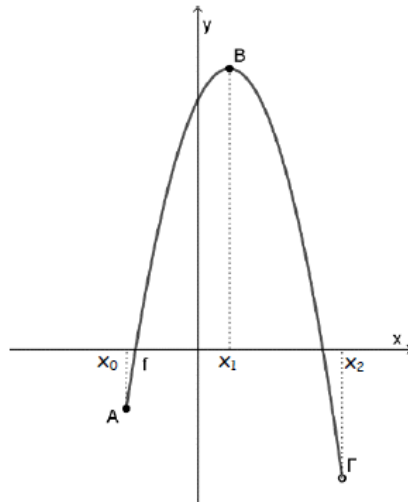
Να βρείτε τα σημεία καμπής της καμπύλης με εξίσωση $y = x^4 - 2x^3 + x - 1$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi''(x) = x(3-x)(x+4)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα.
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής.

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[x_0, x_2]$. Τα σημεία A, B, Γ έχουν τετμημένες x_0, x_1, x_2 αντίστοιχα και $f'(x_1) = 0$.



- α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης f στο διάστημα (x_1, x_2) .

Η ποσότητα ενός φαρμάκου (σε mg), στον οργανισμό του ανθρώπου, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(t)$, όπου t είναι ο χρόνος μετά τη λήψη του φαρμάκου (σε ώρες).

Δίνεται ότι $\Pi'(t) = 12 - 6t, t \geq 0$. Μια ώρα μετά από τη λήψη του φαρμάκου υπάρχουν 9 mg φαρμάκου στον οργανισμό του ανθρώπου.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Π δίνεται από τον τύπο $\Pi(t) = 12t - 3t^2, t \geq 0$.

β) Να βρείτε:

- i) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου η μέγιστη δόση του φαρμάκου,
- ii) τη μέγιστη δόση του φαρμάκου (σε mg), που υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου,
- iii) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του, το φάρμακο αυτό ΔΕΝ θα υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 - ax^2 + \beta x + 1, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε η f να έχει στη θέση $x_1 = 2$ σημείο καμπής και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο.

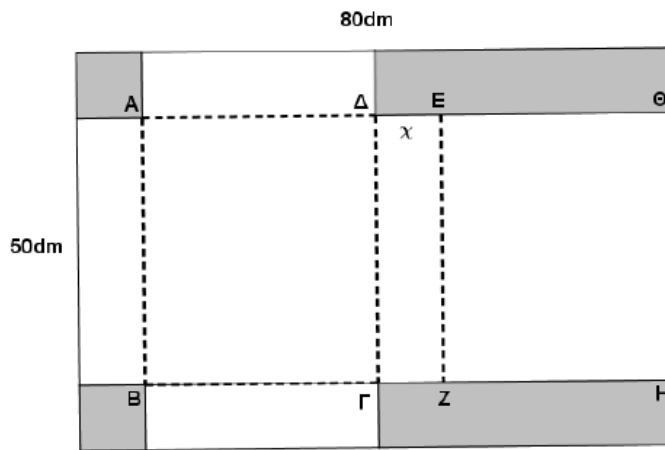
β) Αν $a = 36$ και $\beta = 54$, να βρείτε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων $\alpha, \beta, f(2), f(1), 125$.

α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $(1,0)$. Αν $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

β) Αφού βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης G_f της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Δίνεται ένα χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων $80dm \times 50dm$. Πρόκειται να κατασκευαστεί με αυτό ένα κλειστό κουτί, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ύψους $\Delta E = x dm$ με βάσεις τα ορθογώνια $EZH\Theta$ και $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σκιασμένα μέρη του σχήματος θα αφαιρεθούν. (Οι διπλώσεις θα γίνουν κατά μήκος των τμημάτων $AB, \Gamma\Delta, EZ, A\Delta$ και $B\Gamma$).



α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = (2x^3 - 130x^2 + 2000x) dm^3$$

β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του κουτιού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.